Istituzioni di Matematica
Criteri di derivabilità e non derivabilità

Theorem. *Sia f una funzione definita in un intorno $\mathcal{I}$ di x_0 e tale che*

- *f sia continua in x_0*
- *f sia derivabile in $\mathcal{I} \setminus \{x_0\}$*

Se

$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = \lim_{x \to x_0^-} f'(x) = L \in \mathbb{R}$$

allora f è derivabile[1] *anche in x_0 e $f'(x_0) = L$.*

La dimostrazione segue dall'applicazione del teorema di Lagrange sugli intervalli $[x_0, x]$ e $[x_0, x] \, \forall x \in \mathcal{I}$ e dalla definizione di derivabilità in un punto.

Ne seguono così i seguenti criteri sufficienti per la non derivabilità di f: sia f continua in x_0 e derivabile in $\mathcal{I} \setminus \{x_0\}$. Sia inoltre

$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = L_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0^-} f'(x) = L_2$$

- Se L_1 o L_2 è infinito, allora f non è derivabile
- Se $L_1, L_2 < \infty$ ma $L_1 \neq L_2$, allora x_0 è un punto angoloso
- Se $L_1 = L_2 = \pm\infty$, allora x_0 è un punto a tangenza verticale
- Se $L_1 = +\infty$ e $L_2 = -\infty$, allora x_0 è un punto di cuspide

Nota Bene: Se L_1 non esiste ed $L_2 < \infty$ oppure anche L_2 non esiste, allora non posso trarre conclusioni. L'unico modo è passare dal limite del rapporto incrementale.

[1] Nel caso in cui f sia continua in x_0 ma derivabile solo a sinistra (o a destra) di x_0 e $\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = L$ (oppure $\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = L$), allora esiste solo la derivata sinistra (o destra) di f in x_0, con $f'_-(x_0) = L$ (o $f'_+(x_0) = L$)