Université Paris-Dauphine, DEMI2E
Analyse 1 (2015-2016)

Corrigé de l'exercice 10 du TD3

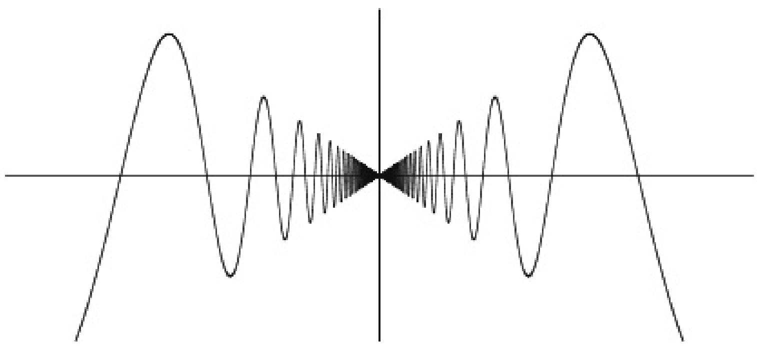
Exercice 10.

1. La fonction sinus étant majorée en valeur absolue par 1, on a :
$\forall x \in \mathbb{R}^*, |\sin(\frac{1}{x})| \leq 1$, d'où : $\forall x \in \mathbb{R}^*, 0 \leq |f(x)| \leq |x|$.
Comme la fonction valeur absolue tend vers 0 en 0, on en déduit par le théorème d'encadrement que $|f|$ (et donc aussi f) a pour limite 0 en 0.

   Soit $\eta > 0$ fixé.
On détermine un entier naturel n tel que $\dfrac{2}{(4n+1)\pi} < \eta$ (un tel n existe puisque $\mathbb{R}$ est archimédien).
On pose alors : $x_n = \dfrac{2}{(4n+1)\pi}$, $y_n = \dfrac{2}{(4n+2)\pi}$ et $z_n = \dfrac{2}{(4n+5)\pi}$.

   On a : $0 < z_n < y_n < x_n < \eta$,
de plus, $\sin[(4n+1)\frac{\pi}{2}] = \sin[(4n+5)\frac{\pi}{2}] = 1$ et $\sin[(4n+2)\frac{\pi}{2}] = 0$, d'où $f(x_n) = x_n$, $f(y_n) = 0$ et $f(z_n) = z_n$.
f n'est pas croissante sur $]0, \eta[$ car $z_n < y_n$ et $f(z_n) > f(y_n)$,
f n'est pas décroissante sur $]0, \eta[$ car $y_n < x_n$ et $f(x_n) > f(y_n)$.
On conclut que f n'est pas monotone sur $]0, \eta[$, donc a fortiori pas monotone sur $]-\eta, \eta[$.

   Ci-dessous l'allure du graphe de f :



2. $\forall x \in \mathbb{R}^*, |\sin x \sin(\frac{1}{x})| \leq |\sin x|$, et on conclut comme à la première question en utilisant la continuité de la fonction sinus en 0 (on peut aussi utiliser l'inégalité : $|\sin x| \leq |x|$ vraie pour tout x réel, inégalité qui se démontre en dressant le tableau de variations sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction h définie par $h(x) = x - \sin x$, et en complétant l'étude par un argument d'imparité).

$\forall x \in \mathbb{R}^*, 0 \leq \mid \dfrac{x \sin x}{x^2+1} \mid \leq \dfrac{\mid x \sin x \mid}{x^2} \leq \dfrac{\mid \sin x \mid}{\mid x \mid} \leq \dfrac{1}{\mid x \mid}$
Comme $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{\mid x \mid} = 0$, on conclut que $\lim\limits_{x \to \infty} \mid \dfrac{x \sin x}{x^2+1} \mid = 0$ en utilisant à nouveau le théorème d'encadrement.

3. Posons : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \dfrac{x^2 \sin x}{x^2+1}$.

   Pour montrer que la fonction g n'a pas de limite en $+\infty$, on va construire deux suites (u_n) et (v_n) tendant toutes deux vers $+\infty$ et telles que les suites $(g(u_n))$ et $(g(v_n))$ aient des limites différentes.
   En effet, si g avait une limite l en $+\infty$, on sait d'après le théorème de caractérisation séquentielle que pour toute suite (x_n) tendant vers $+\infty$, la suite $(g(x_n))$ convergerait vers l.

   Posons : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n\pi$ et $v_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$.
   Chacune des deux suites (u_n) et (v_n) tend vers $+\infty$.
   De plus : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sin n\pi = 0$, d'où : $\forall n \in \mathbb{N}$, $g(u_n) = 0$; la suite $(g(u_n))$ est la suite nulle et converge bien évidemment vers 0.
   $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = 1$, d'où : $\forall n \in \mathbb{N}$, $g(v_n) = \dfrac{v_n^2}{v_n^2+1} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{v_n^2}}$; comme (v_n) tend vers l'infini, $(\dfrac{1}{v_n^2})$ tend vers 0 et $(g(v_n))$ tend vers 1.

   On peut donc conclure à la non-existence d'une limite en $+\infty$ pour la fonction g.